שבתאי אונגורו

היסטוריה, מתמטיקה, והיסטוריה של המתמטיקה

האם ההתאמה בין הצעדים שנקט הסופר הבבלי לפתרון בעיה לבין צעדי הנוסחה הריבועית, מצביעה על זהות קווי המחשבה של הבבלי ושל המתמטיקאי המודרני? על שאלה זו ועל אחרות מבקש המאמר להשיב, תוך בירור העקרונות המתודולוגיים שצריכים להנחות את עבודת ההיסטוריון של המתמטיקה.
באמצעות ניתוחן של שלוש דוגמאות היסטוריות – הבבלית, המצרית והיוונית – תוקף המחבר את הגישה הפלטוניסטית המסוכנת והמסרסת, לדעתו, הנקוטה בידי היסטוריונים רבים של המתמטיקה. גישה זאת הוא מבקש להמיר בגישה סימפטתית, דיאכרונית, ורטיקלית שתסתנן לתוך הזרות ותשכיל לזהות את המשתנה בהיסטוריה.

בפואטיקה שלו מבחין אריסטו הבחנה יסודית בין **היסטוריה לבין שירה:** ״מתוך האמור ברור גם שתפקיד המשורר הוא לספר לא את העובדות (הדברים שקרו), אלא את סוג הדברים שעשויים לקרות, כלומר את המאורעות האפשריים לפי הסתברות או הכרח. שהרי ההיסטוריון והמשורר נבדלים זה מזה לא במה שהם מספרים בחרוזה או לא בחרוזה (בפרוזה), (שהרי אפשר לערוך את כתבי הרודוטוס בחרוזה ועם זאת הם לא יהיו פחות היסטוריה בחרוזה מאשר בלי חרוזה); אלא בזאת הם נבדלים: האחד מספר את העובדות (הדברים שקרו), ואילו השני – את סוג הדברים שעשויים לקרות. משום כך השירה היא יותר פילוסופית ויותר נכבדה מן ההיסטוריה; כי השירה מספרת בעיקר עניינים כלליים, ואילו ההיסטוריה – עניינים פרטיים. הכללי פירושו: אלו סוגי דברים אדם בעל איכות מסוימת יאמר או יעשה לפי ההסתברות או ההכרח, ולכך מתכוונת השירה כשהיא קובעת שמות; ואילו ׳הפרטי׳ – מה עשה אלקיביאדס או מה עשו לו. בקומדיה כבר הוברר דבר [כללי] זה: לאחר שהם בונים את העלילה באמצעות דברים מסתברים, רק אז הם קובעים [לנפשות הפּועלות] שמות המזדמנים להם, ואינם כמשוררים היאמביים הכותבים על אישים פרטיים. אבל בטרגדיה דבקים [המשוררים] בשמות ההיסטוריים, והטעם הוא שמה שאפשרי משכנע; שהרי בנוגע לדברים שלא קרו, איננו בטוחים עדיין שהם אפשריים, אך לגבי עובדות (דברים שקרו) הרי ברור שהן אפשריות, כי אילו היו בלתי־אפשריות, לא היו קורות.״

זהו קטע מדהים בבהירותו, בחשיבותו, ביופיו ובאמיתותו. (אגב, בגלל ההבחנה היסודית הכלולה בו, שהיא הבחנה בין סיפורת Fiction והיסטוריה History, כל כך הרבה יצירות בלטריסטיקה, רומנים־כביכול, השייכים לזרם הריאליסטי, הנטורליסטי, אינם נראים יצירות מופת אמנותיות, השייכות לתחום הסיפורת, אלא גירסות שונות של היסטוריה בלבוש מטעה של סיפורת. זאת גם הסיבה לכך שאין היצירות הללו משיגות את המטרה הנשגבה והבסיסית ביותר של true Fiction , והיא, כפי שאמר הנסיך קרופוטקין לאחיו, ״לעשות אותנו לאנשים טובים יותר.״)

מתודולוגיה נאורה

ובכן, ההיסטוריה היא חקר השרידים הקיימים של מאורעות העבר מנקודת המבט של ההתרחשות והשינוי, הפרטיקולרי, האידיוסינקרטי. אף כי סטרוקטורות בנות־קיימא, מסגרות סטביליות, מאפיינים מתמשכים, דוראביליים, קבועים־לכאורה משמשים נושאים לגיטימיים של המחקר ההיסטורי, לא הם הקובעים את מהלכה של ההיסטוריה. בראש ובראשונה ההיסטוריה מעוניינת במאורע qua מאורע פרטיקולרי, בהתרחשות הספציפית, בשינוי ממאפיין שאפשר לזהותו כאינדיבידואלי למאפיין אינדיבידואלי אחר. ההיסטוריה אינה טורחת (או אינה טורחת בעיקרה) לקבץ מאורעות ביחד, לאסוף אותם ולהכניסם בצוותא תחת כינוי אחיד, תחת מכנה משותף, על־ידי הורקתם מהאינדיבידואליות שלהם. נהפוך הוא, ההיסטוריה מנסה להבין כל מאורע שאירע בעבר בזכות עצמו. תחומה של ההיסטוריה, על כן, הוא האידיוסינקרטי.

היסטוריון של האידיאות, והדברים ידועים היטב, אינו ממלא את המוטל עליו כשהוא מראה עד כמה רעיונות העבר דומים לרעיונות המודרניים. מאמצו העיקרי חייב להיות מושקע בכיוון אחר: להראות עד כמה רעיונות העבר שונים מרעיונות מודרניים, מבלי להתחשב בכך שהם כן הוליכו, או לא הוליכו, לרעיונות המודרניים. זוהי גישה מתודולוגית נאורה, מפני שהיא מאפשרת להיסטוריון להימנע מאנכרוניזם רדוקטיבי תוך כדי תיעול האמפטיה ההיסטורית שלו אל הבנת העבר בזכות עצמו. כמו כן, מן התבונה הוא לתפוש את המקורות הכתובים של העבר כאילו מובנם נעוץ במפורש ובמדויק במה שהם אומרים, אלא אם כן יש הוכחה ברורה לתפישה נגדית. מן ההשערה המיותרת שאנשי העבר רימו אותנו בשיטתיות על־ידי הסתרת כיוון המחשבה שלהם לא צומחת כל תועלת היסטורית.

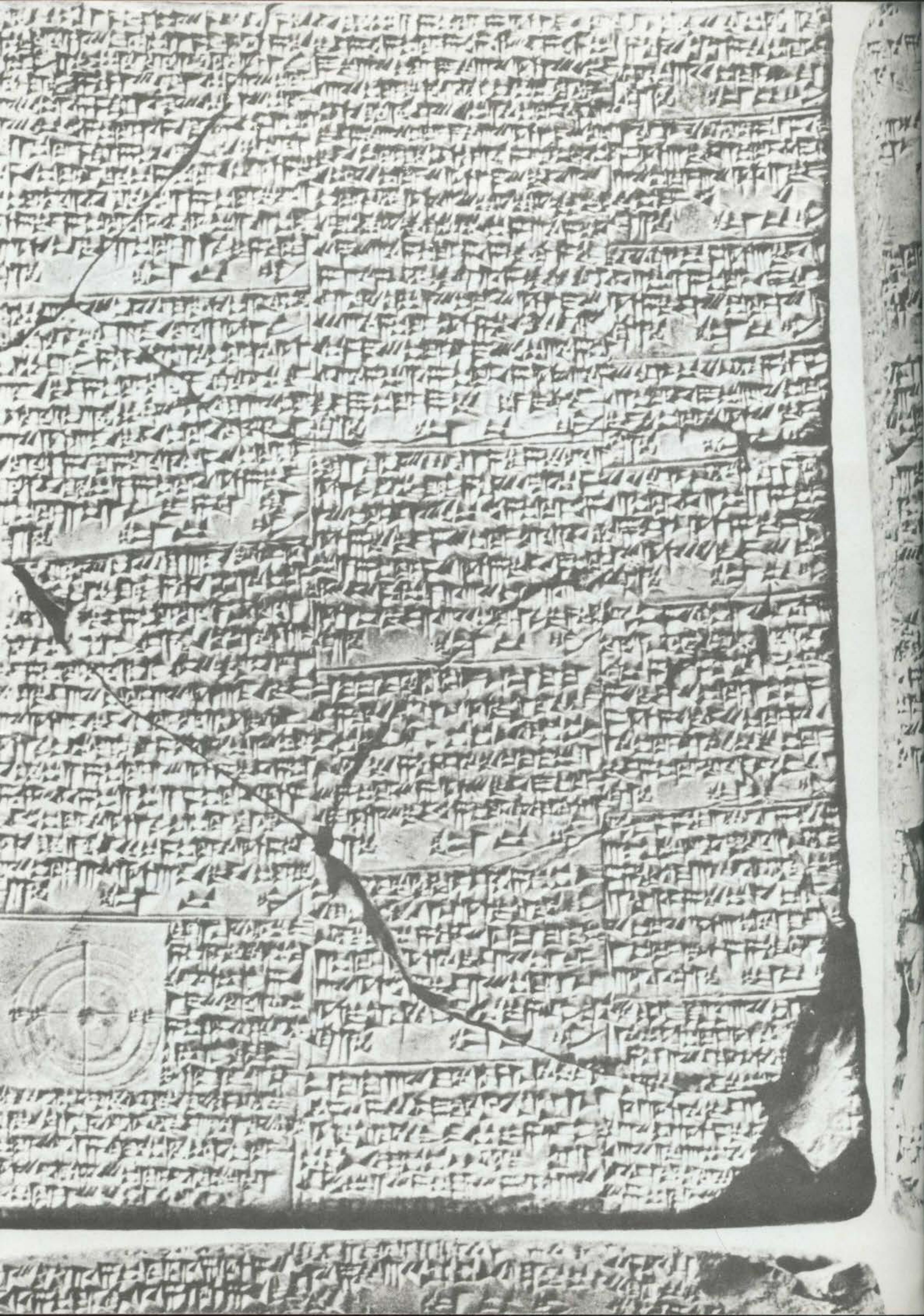
למתמטיקה ניתנו הרבה הגדרות במרוצת ההיסטוריה הארוכה שלה. הבחירה עשירה ומגוונת, וכל קורא יכול לברור לעצמו אחת שתתאים לנטיותיו. אצטט כאן רק שתיים. ברטרנד ראסל אמר: ״אפשר להגדיר את המתמטיקה כנושא שבו אף פעם איננו יודעים על מה אנו מדברים, וגם לא אם מה שאנו אומרים הוא נכון.״ וניקולא בורבאקי, המחבר הדמיוני המייצג אסכולה מתמטית צרפתית, בעלת גישה אקסיומטית חמורה, המסווגת את המתמטיקה כולה על־פי המבנה הסטרוקטורלי המאפיין את מקצועותיה השונים, אמר: ״ תיאוריה מתמטית... כוללת חוקים המאפשרים לנו לטעון שקבוצות סימנים מסוימות הן מונחים או יחסים של התיאוריה, וחוקים אחרים המאפשרים לנו לטעון שקבוצות סימנים מסוימות הן תאורמות של התיאוריה.״

מבלי להתחייב למה שבאמת מאפיין את המתמטיקה, קל לי להגיד לקורא מה שהמתמטיקה איננה. היא בוודאי לא היסטוריה. תחומה של המתמטיקה הוא לא האידיוסינקרטי, אלא, ובמלוא מובנה של המלה, הנומוטטי, מפני שמה שהמתמטיקאים עושים בעבודתם המקצועית, זה להראות שמהנחות מסוימות על אובייקטים בלתי מזוהים נובעות בהכרח, על־פי חוק, מסקנות מסוימות על אודות אותם האובייקטים.

ההיסטוריה של המתמטיקה היא היסטוריה, לא מתמטיקה. היא עוסקת בחקר האספקטים האידיוסינקרטיים של פעולת המתמטיקאים, בשעה שהם עצמם טרודים בעיון בנומוטטי, כלומר, במה שמתרחש על־פי החוק. מי שכותב את ההיסטוריה של המתמטיקה ולא את המתמטיקה: של ההיסטוריה חייב להיזהר תכלית הזהירות שלא להמיר את האידיוסינקרטי בנומוטטי, כלומר, לא לעסוק בעבר של המתמטיקה כאילו למתמטיקה אין עבר מעבר לשינויים טריביאליים במראהו החיצוני של תוכן, שמבוחינה בסיסית הוא בלתי־משתנה.

במתמטיקה, כמו בכל תחום אחר, הצורה והתוכן אינם משתנים בבלתי־תלויים. נהפוך הוא, הם מושפעים זה מזה ושניהם אינם חסינים מפני שינוי. צורה מסוימת מאפשרת רק תוכן מסוים, ואילו תוכן חדש נזקק לצורה חדשה. משום כך, אל להיסטוריון של המתמטיקה להתעלם מצורתו הספציפית של תוכנו של המסמך (המקור הראשוני) שאותו הוא חוקר, או

טבלת חימר בבלית ועליה טקסט מתמטי בכתב־היתדות. מספרים ופעולות חשבוניות הקסימו את המתמטיקאי הבבלי.



פפירוס מתמטי מצרי המציג פעולות אריתמטיות פשוטות.

להתייחס לצורתו בקלות ראש כאילו התוכן הוא הקובע, תהא צורתו אשר תהא. אחרת, במקום להישאר בתחומה של ההיסטוריה – האידיוסינקרטי – החוקר, במודע או שלא במודע, גולש לתחומה הנומוטטי של המתמטיקה, ובמקום לדבר על מה שהיה, הוא מדבר על מה שהיה יכול או מה שהיה צריך להיות. וכך, הוא הופך מהיסטוריון למשורר, לכותב פיקציות, למתמטיקאי.

א־היסטוריות מסרסת

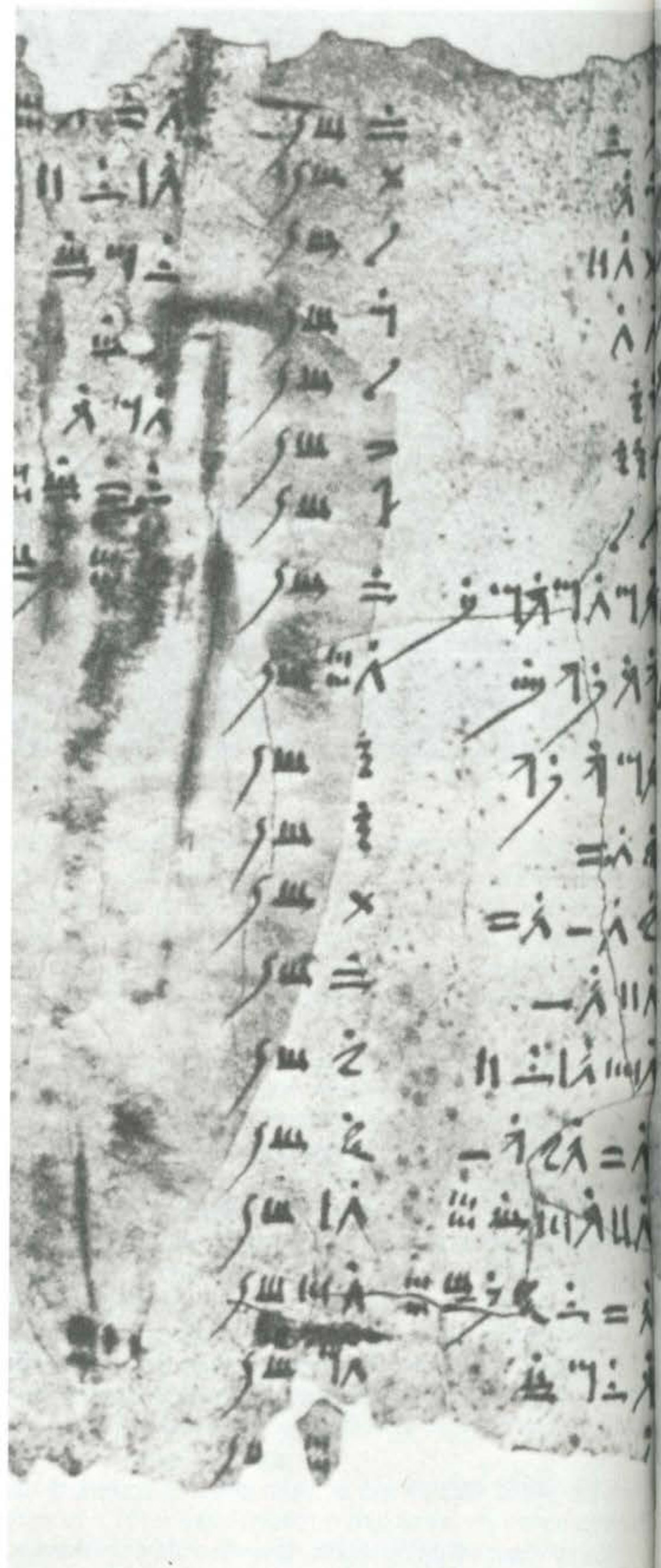
זה נראה לי כטרואיזם, כעיקרון מתודולוגי בסיסי, ובכל זאת, באופן מסורתי התעלמו כותבי ההיסטוריה של המתמטיקה ממשמעותו ההיסטוריוגרפית המכרעת. קשה להגזים בתוצאות המזיקות של העלמת העין הזאת. תולדות המתמטיקה נכתבו, כביכול, כאילוסטרציה למימרה ״אנכרוניזם זה לא חטא״. רוב ההיסטוריונים של המתמטיקה בני זמננו, בהיותם מתמטיקאים על־פי הכשרתם, מניחים במפורש או במובלע שהאובייקטים והיחסים המתמטיים שוכנים בעולם האידיאות האפלטוני, ושם הם מחכים בסבלנות להתגלותם על־ידי הגניוס של המתמטיקאי בפועלו המקצועי. מונחים מתמטיים, קונסטרוקטיביים וחישוביים כאחד, נתפשים כנצחיים, בלתי משתנים ובלתי ניתנים להשפעה על־ידי התווים האידיוסינקרטיים של התרבות שבתוכה הם מופיעים, כל אחד מהם ניתן לזיהוי ברור בהתגלמויותיו ההיסטוריות השונות, מאחר שההתגלמויות הללו אינן אלא מלבושים שונים של אותה היפוסטזה (hypostasis) אפלט־ונית.

צורות שונות של אותו מושג מתמטי, או אותה פעולה מתמטית אינם נחש־בים כשקולים מבחינה מתמטית גרידא, אלא גם כשקולים מבחינה היסטו־רית. יתר על כן, שקילות מתמטית נתפשת כמייצגת שקילות היסטורית. הואיל והצורות המתמטיות הן נצחיות, והואיל והמתמטיקאים של כל הז־מנים נוטלים חלק בהבעת אותן צורות, הניב המתמטי הספציפי בשימושו של מתמטיקאי מסוים אינו יכול להשפיע על תוכן חשיבתו. השפה המתמ־טית היא לכל היותר ספיח משני בחשיבותו לתרבות המתמטית של כל תקופה. הגלעין המתמטי לא נדבק מהשפה הפרטיקולרית המופיעה במסמך מסוים, מפני שכל השפות המתמטיות השונות מוליכות בחזרה לאותן צו־רות אידיאליות. זה מה שגורם לכך שהדפוסים הצורניים השונים, שבאמצעותם הובעה אותה אמת מתמטית במשך הדורות, הם שקולים זה לזה באופן מוחלט. באונטולוגיה כזאת, תכליתה של ההיסטוריה של המתמטיקה היא לזהות אותן הצורות האידיאליות הקיימות והמסתתרות בעבודותיו של כל מתמטיקאי בהיסטוריה, ולהקציב את האשראי ואת התהילה המתאימים לאותו מתמטיקאי שהיה הראשון להביע את אחת הצורות הנצחיות הללו, ז.א. המתמטיקאי שהוציא את הצורה מן הממלכה האפלטונית הנצחית ונתן לה ביטוי ומשכן בעולמה של התודעה האנו־שית. זאת בדיוק המשימה המבוצעת באופן מסורתי על־ידי ההיסטוריון של המתמטיקה.

אבל במידה שהחוקרים ממשיכים לזנוח את האיפיונים הספציפיים, הפרטיקולריים של תרבות מתמטית נתונה, בין כתוצאה של הנחות מפור־שות ומנוסחות היטב, או כתוצאה של הנחות מובלעות וכביכול מובנות מאליהן, מחקריהם, על־פי ההגדרה, הם באותה מידה א־היסטוריים, ועל קהיליית ההיסטוריונים להכיר במהותם האמיתית של המחקרים המסרסים הללו.

שיטת הניחוש המוטעה

ברצוני ליטול כמה דוגמאות מן העבר של המתמטיקה ולנתח אותן כדי,



מצד אחד לעמוד על טיבן האמיתי, ומן הצד האחר, להתרות על הסכנות המסרסות האורבות להיסטוריון ההופך למשורר (מתמטיקאי).

הדוגמה הראשונה שלי לקוחה מתולדות המתמטיקה המצרית הקדמונה. ב־Rhind papyrus מופיע בין היתר סוג של בעיות הנקראות "בעיות ערי־מה" (Aha Problems), שהסטרוקטורה שלהן היא: "מה הערימה, אם הערי־מה וחלק ממנה הם נתון." כך, למשל, אנו מוצאים את הבעיה הבאה: "מה הערימה אם הערימה ושביעית ממנה שווה ל־19?" כל מי שמציג את הפיתרון של הסופר (Scribe) באמצעותה של משוואה מן המעלה הראשונה $x + \frac{x}{7} = 19$, חוטא למעשה לאמת ומסרס את המקורות, מפני שההצגה הזאת אינה תואמת את הכתוב בפפירוס. אכמס (Ahmes) אינו פותר שום משוואה. גישתו היא מה שנקרא "שיטת הניחוש המוטעה" (the method of false_position):

נניח שהערימה היא 7. אזי, על־פי הנתון, $8 = 1 + 7$, וזה לא 19. אבל אותו מספר פעמים שיש להכפיל את 8 בכדי להגיע ל־19 יש להכפיל את 7 בכדי להגיע לערימה הנכונה. כלומר, כדי למצוא את התשובה יש לחלק את 19 ב־8, והתשובה, לאחר חישוב די מסובך מבחינתנו – באמצעות מה שנקרא Unit fractions (שברים בעלי מונה 1) – היא $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. (אין אני מראה כאן כיצד אכמס מבצע את החילוק). כעת, כדי למצוא את הערימה יש להכפיל את $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ ב־7.

ברור למדי שהפעולות שהסופר המצרי נוקט אינן פעולות של פתרון משוו־אה, ומי שמציב את סימן השוויון ביניהן ובין פיתרון של משוואה מסלף. אצל אכמס אין משוואות, אין סימול כללי, אין מניפולציות של סמלים, אין כל אבסטרקציה הכרוכה בהתרת משוואות וכו' וכו'. בין ההתרה באמצעות הניחוש של ה־false position לבין התרת משוואה מפרידה תהום שאין לגשר עליה באמצעות קיצורים מסלפים. משוואה והתרתה זה עולם אחד, הניחוש של ה־false position וניצולו כדי למצוא את התשובה זה עולם אחר לחלוטין וביניהם התהום.

דוגמה שניה – המתמטיקה הבבלית. אחד הטקסטים המתמטיים הבבליים (הכתובים בכתב־היתדות), שפרסם אוטו נויגֶבָּאוּאר ב־*Mathematische Keilschrifttexte*, (1937) BM 13901, מציג את הבעיה הבאה: "החסרתי את (הצלע) של הריבוע מהשטח וזה 14,30." הפיתרון המתלווה לניסוח מבהיר שכוונת הבעיה היא שימצאו את הצלע של הריבוע. ברם, לפני שאתן את הפיתרון עלי להסביר את פשרו של המספר 14,30. כידוע, השי־טה של כתיבת מספרים אצל הבבלים היתה שיטה פוזיציונלית סקסגסימ־לית, כלומר, למספר לא היה רק ערך עצמאי משלו, אלא ערכו נקבע גם על־פי מקומו ביחס לשאר הסמלים המספריים המרכיבים מספר נתון. בסיס הספירה היה המספר 60. גם השיטה שלנו היא שיטה פוזיציונלית, אך בסיס הספירה הוא המספר 10, ולכן היא נקראת שיטה פוזיציונלית עשר־ונית. כך, למשל, כשאנו כותבים 222, לכל אחד מן הסמלים המספריים הזהים – 2 – יש ערך שונה בהתאם למיקומו במספר. ערכו האמיתי של המספר אינו 2 ועוד 2 ועוד 2, אלא $2 \times 100 + 2 \times 10 + 2$. כך גם אצל הבבלי, בהבדל הבסיס שכאמור הוא 60. שיטת התעתיק של מספרים סקסגסימליים לשפה המתמטית שלנו הומצאה על־ידי אותו נויגבאואר, והיא מפרידה בין מקומות סקסגסימליים באמצעות פסיקים ובין שלמים לחלקי שלמים (סקסגסימליים) באמצעות נקודה ופסיק – ";". יוצא איפוא שהמספר 3,12;21, למשל, שווה ל־$3 \times 60 + 12 + \frac{21}{60}$.

מכאן שהמספר המופיע בטבלת החימר המזוהה ב־BM13901 בבעייתנו לעיל שווה בערכו ל־$14 \times 60 + 30$, ז.א. 870.

וכעת לפיתרון המופיע בטקסט הנ"ל:

"קח 1. חלק 1 לשני חלקים שווים: 0;30 כפול 0;30 שווה ל־0;15. חבר זאת ל־14,30, ו(לתוצאה) 14,30;15 ישנו שורש ריבועי השווה ל־29;30. חבר את ה־0;30 שהכפלת בעצמו ל־29;30 ו־30 היא (הצלע של) הריבוע".

על הבעיה הזאת אמר ב.ל. ון דר וָרְדֶן:

"הצגת הבעיה היא ברורה לחלוטין: אין צורך לתרגם אותה לסימבוליזם מודרני. אם בכל זאת נתרגמה נגיע למשוואה $x^2 - x = 870$."

ועל פתרונה: "זוהי אותה שיטת פיתרון שאנו לומדים בבית־הספר. על־פי ההגדרה שלנו זוהי אלגברה." ון דר ורדן מתבסס בפירושו על העובדה, שכאשר משווים את הפעולות המתוארות בטבלת החִימר הבבלית להתרת הבעיה הנדונה לפעולות המתוארות בנוסחה המודרנית להתרתה של משוואה ריבועית, מוצאים שהפעולות הללו זהות. מכאן הוא מסיק על זהותה של הבעיה הבבלית כבעיה אלגברית. ברם, המסקנה הזאת אינה נובעת מהניתוח, למרות שהיא מתאימה בכל שלביה לתיאור הניתן בכתב־היתדות. על־ידי תירגום הטקסט היתדי (קוּנֵאִיפוֹרמִי) ל־$x^2 - x = 870$, ון דר ורדן מראה שהצעדים של הסופר הבבלי בפתרון הבעיה הולמים בדיוק את הנוסחה הריבועית, בלי הפיתרון השלילי אומנם. כלומר, מה שהבבלי עושה זה:

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 870} = \frac{1}{2} + \frac{59}{2} = 30$$

שהוא כביכול יישומה של הנוסחה הריבועית. (וכאן עלי להזכיר לקורא את הנוסחה להתרת המשוואה הריבועית בצורתה:

$$ax^2 + bx + c = 0 \;; a \neq 0$$

$$X_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - ac}}{a}$$

התשובה הידועה מראש

האם העובדה שיש התאמה מוחלטת בין צעדי הבבלי לצעדי הנוסחה הריבועית מצביעה על זהות קווי המחשבה של הבבלי ושל המתמטיקאי המודרני? והאם פירושו של ון דר ורדן הוא הפירוש המתאים היחיד? התשובה לשתי השאלות גם יחד היא שלילית. ישנם פירושים אחרים שתואמים את צעדי הבבלי בדייקנות מוחלטת וכו בזמן קרובים הרבה יותר לאופיה ולמהותה של המתמטיקה הבבלית. אציג בפני הקורא פירוש אחד כזה:

המתמטיקאי הבבלי (כותב הטבלאות המתמטיות) היה מוקסם ממספרים ומפעולות חשבוניות – זוהי עובדה ידועה לכל. הטקסטים הטבלתיים (table texts) שנדונו על־ידי נויגבאואר מהווים דוגמה בולטת ביותר. קיימות טבלאות כפל, טבלאות של היפוכי מספרים (tables of reciprocals), טבלאות של "מספרים פיתגוראיים", טבלאות של ריבועים ושורשים ריבועיים, קוביות ושורשים מעוקבים, סכומים של ריבועים וקוביות, טבלאות מעריכיות (אקספוננציאליות) וכו'. טבעי למדי, על כן, להניח שהמתמטיקאי הבבלי ידע, כתוצאה של ניסוי וטעיה איך לרבע סכום או הפרש של מספרים ספציפיים כגון:

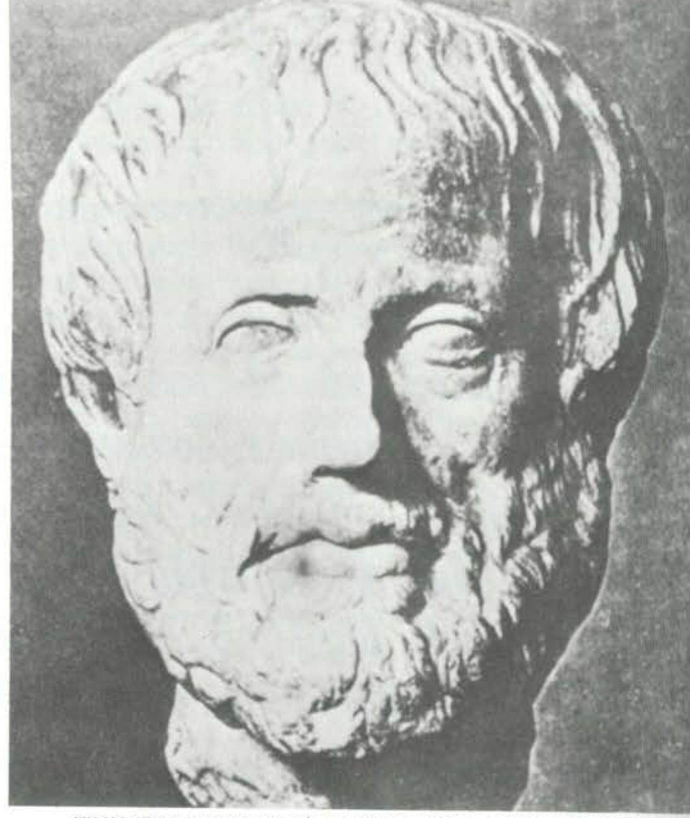
$(6\pm4)^2 = 6^2 \pm 2 \cdot 6 \cdot 4 + 4^2 = \,<^{100}_{4}$ (הכתיב הוא אנכרוניסטי).

דרך מאוד מתקבלת על הדעת להשגת הידע הזה נובעת בטבעיות מן הני־סיון לרבע סתם מספר, הכתוב בשיטה הסקסגסימלית הבבלית:

𒁹𒌋𒌋 $= 1{,}20 = 1 \cdot 60 + 20 = 80$

$(1{,}20)^2 = 1^2 + 20^4 + 2 \cdot 1 \cdot 20$

מפני שבטקסטים המתמטיים האמיתיים מתחיל הבבלי בהתרת רוב רובן של הבעיות על־ידי הצגת התשובה הידועה מראש, רק הידיעה הפשוטה של ההשלמה לריבוע מספיקה כדי להבין במלואה את גישתו של הבבלי, צעד אחרי צעד, להתרת הבעיה של BM 13901. דהיינו, סידרת הצעדים



אריסטו – הוכחה אינטואיטיבית, גאומטרית, ציורית הולמת את תיאורו יותר מן הפירוש האלגברי.

המתוארים בטקסט היתדי תואמת במדויק את הסדר הבא, בהנחה שהכותב התחיל בידיעה ש:

$$30^2 - 30 = 14,30$$

$$30^2 - 2 \cdot 30 \cdot \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 = 14,30 + (\tfrac{1}{2})^2$$

$$(30 - \tfrac{1}{2})^2 = 14,30{:}15$$

ומפני שהכל גלוי וידוע, הסופר הרי יודע ש:

$$(30 - \tfrac{1}{2})^2 = (29{:}30)^2$$

$$30 - \tfrac{1}{2} = 29{:}30$$

$$30 = 29{:}30 + 0{:}30$$

מדוע עדיף הפירוש שלי על פירושו של ון דר ורדן? בקצרה, מפני שיחד עם התאמתו המוחלטת לצעדי הבבלי, הוא אינו מניח, בניגוד לעדות הטקסט ולאופיה של המתמטיקה הבבלית, את ידיעתה של הנוסחה הריבועית על־ידי המתמטיקאי הבבלי, שגישתו לפיתרון הנ"ל היא גישה של מתכון, ראיה של אשף מטבח ולא של אבסטרקציה אלגברית.

בנקודה זו כדאי אולי לציין שהפירוש שאני נותן ל־BM 13901 – שנראה בעיני יותר רגיש היסטורית מפירושו של ון דר ורדן – ניתן ליישום מלא בכל אותם המקרים בטקסטים מתמטיים יישומיים של היוונים כגון ה־*Geometrica* של הרון מאלכסנדריה וגם ב־*Arithmetica* של דִיוֹפַנְטוֹס (למ־רות אופיה השונה), שבהם מופיעות כביכול "משוואות ריבועיות". מסי־בות מובנות מאליהן נבצר ממני להדגים את הדבר כאן.

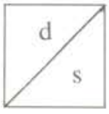
דרך גאומטרית נאיבית

דוגמה שלישית – מתמטיקה יוונית. ב־*Analytica Priora* (αναλυτικὰ πρότερα), בדברו על שיטת הוכחה הנקראת (reductio ad impossibile),

אאוקלידס באיור מימי־הביניים. בין הניסוח האלגברי לבין הניסוח המופיע אצל אאוקלידס מפרידה תהום עמוקה.

מדגים אריסטו את מהותה של השיטה בהתייחסו למסקנה שהצלע והאלכ־סון של ריבוע הם אינקומנזורביליים (חסרי מידה משותפת). והנה דבריו: "שכן כל אלה המעלים טיעון per impossibile מקישים על־סמך סילוגיזם את השקרי ומוכיחים היפותטית את המסקנה המקורית כאשר מהנחת סתירתה נובע דבר־מה בלתי־אפשרי; למשל, אלכסון המרובע הוא אינקומנזורבילי עם צלעו מאחר שאם מניחים שהוא קומנזורבילי, אזי מספרים פרטיים שווים למספרים זוגיים. מסיקים באמצעות סילוגיזם כי נובע שמספרים פרטיים שווים למספרים זוגיים ומוכיחים היפותטית את האינקומנזורביל־יות של האלכסון מאחר שמסתירתה נובעת שקריות. כך נמצאנו טוענים per impossibile, לאמור מוכיחים שדבר־מה הוא בלתי־אפשרי באמצעות היפותזה שהסכמנו לקבלה בתור הנחה בתחילת הטיעון."

הדרך המקובלת לפירוש דבריו של אריסטו בספרי תולדות המתמטיקה היא זאת:



נניח ש־d ו־s הם קומנזורביליים,

ז.א. $\frac{d}{s} = \frac{p}{q}$

כאשר $(p,q) = 1$, כלומר, אין גורם משותף לשני המספרים p ו־q, המורים כמה פעמים נכנסת המידה המשותפת בהתאמה לאלכסון ולצלע.

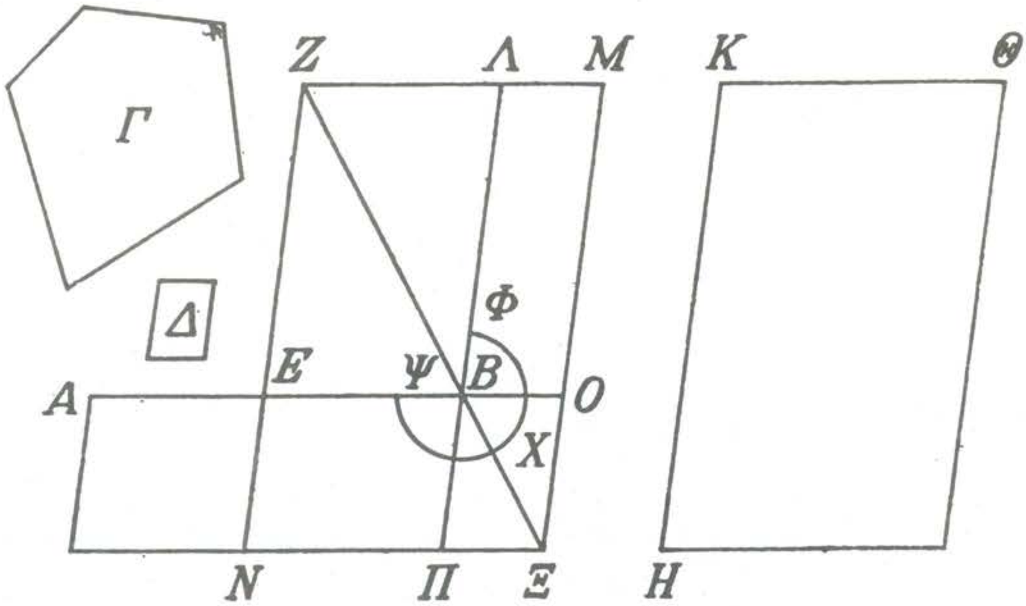
$$\therefore \frac{d^2}{s^2} = \frac{p^2}{q^2}$$

ממשפט פיתגורס ידוע ש:

$$d^2 = 2s^2$$

$$\therefore \frac{2s^2}{s^2} = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\therefore \frac{p^2}{q^2} = 2,\ p^2 = 2q^2,\ \therefore p = 2m$$



ιον. ἀλλὰ τὸ $H\Theta$ τῷ $E\Lambda$ ἐστιν ὅμοιον· καὶ τὸ MN ι τῷ $E\Lambda$ ὅμοιόν ἐστιν· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ι τὸ $E\Lambda$ τῷ MN. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ $Z\Xi$, καὶ ταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Επεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $H\Theta$ τοῖς $E\Lambda$, Γ, ἀλλὰ τὸ $H\Theta$ τῷ Ν ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ MN ἄρα τοῖς $E\Lambda$, Γ ἴσον ἐστίν. νὸν ἀφῃρήσθω τὸ $E\Lambda$· λοιπὸς ἄρα ὁ $\Psi X\Phi$ γνώμων Γ ἐστιν ἴσος. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ EB, ἴσον ὶ καὶ τὸ AN τῷ NB, τουτέστι τῷ ΛO. κοινὸν προσ-

$K\Theta > Z\Lambda$, $KH > ZE$] nam per prop. κ' erit $HB : KM =$ $^2 : K\Lambda^2 = HZ^2 : \Lambda M^2$. iam cum $HB > KM$, erit $HE^2 > K\Lambda^2$, $^2 > \Lambda M^2$, h. e. $HE > K\Lambda$, $HZ > \Lambda M$ || **4.5** τὸ MN — ὅμοιόν] a $HB \sim KM$, erit $\angle OH\Xi = K\Lambda M$. itaque $H\Pi$, KM aequi- ula sunt. quare et similia sunt (def. α') et aequalia (prop. ιδ'). p. 80, 6 || **5.6** $MN \sim E\Lambda$] ς', κα' || **6.7** περὶ — MN] ς', κς' || $AN = NB = \Lambda O$] α', μγ'

$K\Theta$] ΘK **F** || **3** KH corr. ex KB m. rec. **P** || **4** τε om. **V** | ιν **P** || **5** τὸ²] τῷ **F**, sed corr. || **6** $E\Lambda$] Λ **F** | ἐστιν ὅμοιον **V** | ιν **P**, comp. **p**; ἐστι **BFV** || **7** ἐστι supra **F** | αὐτῶν] αὐτῶν ἡ **V** || πεὶ οὖν **FV** | τὸ¹] τῷ **F** || **10** ἐστί **PBV**, comp. **p** | ἐστί **BV**, mp. **p** || **11** $E\Lambda$ mutat. in $\Theta\Lambda$ m. 1 **F** || **12** AE in ras. m. 2 **V** || τουτέστιν **P**; comp. **p** | ΛO] O e corr. m. 1 **F**

דף מתוך ה״אלמנטים״ לאאוקלידס.
האותיות המופיעות בהוכחותיו של אאוקלידס
הן לא סמלים אמיתיים,
אלא שמות־עצם עשירים, כפולי־משמעות,
ומיסתוריים יותר מן הסימול האלגברי.

כלומר, p הוא מספר זוגי כי ריבועו הוא זוגי. פירושו של דבר, על־פי הנחתנו $(p,q) = 1$ ש־q צריך להיות אי־זוגי,

$$\therefore 4m^2 = 2q^2,\ q^2 = 2m^2,\ \therefore q = 2n$$

ז.א., גם q הוא זוגי, כך שמספר אי־זוגי הוא גם זוגי. על כן, ההנחה ההתחלתית על קומנזורביליות היא מוטעית, ומכאן נובעת המסקנה הרצויה על האינקומנזורביליות.

הפירוש האלגברי הזה, על כל המשתמע ממנו, מניח סופיסטיקציה סימבולית בלתי מעוגנת בטקסט, הסותרת את אופיה של המתמטיקה היוונית. ברור שתגלית האינקומנזורביליות על־ידי האסכולה הפיתגוראית, בסביבות 430 לפני הספירה, לא היתה יכולה לספק הוכחה לדבר כגון זו הניתנת לרמזיו של אריסטו. באיזו דרך, איפוא, הוכיחו הפיתגוראים את דבר האינקומנזורביליות אם לא בדרך אלגברית? בדרך גאומטרית, נאיבית הניתנת לרקונסטרוקציה על סמך הערותיו של אפלטון במנו, בשיעור הגאומטריה שבו מנחה סוקרטס את עבדו של מנו לבנות ריבוע שיהיה כפול בשטחו משטח ריבוע נתון (B58 – B28). בתחילה טועה העבד פעמיים: ראשית הוא לוקח כצלע הריבוע הכפול כפליים הצלע של הריבוע הנתון. ושנית, שלושה חצאים של הצלע הנתונה. לבסוף, בעזרתו של סוקרטס, התשובה הנכונה מתקבלת, דהיינו, שהצלע המבוקשת שווה לאלכסונו של הריבוע הנתון. בהנחיותיו רומז סוקרטס שהצלע והאלכסון של הריבוע אינם בני מידה משותפת. כך הוא פונה לעבד ומייעץ לו להצביע על הצלע הדרושה אם הוא אינו מסוגל למדוד אותה. הבעיה נפתרת באמצעות הדיאגרמה הבאה:

אם הריבוע הנתון הוא ABCD הבנוי על צלע AB, אפשר לראות בנקל ולהצביע על כך שהריבוע DBHI הבנוי על אלכסונו של הריבוע הנתון הוא כפול בשטחו לשטח ABCD.

כעת, על סמך אותה דיאגרמה, ותכונות המספרים הזוגיים והאי־זוגיים שנחקרו על־ידי הפיתגוראים, אפשר להראות (להוכיח – δείκνυμι) שהצלע והאלכסון הם חסרי מידה משותפת. הדבר נעשה כך: אם DB ו־DH הם בעלי מידה משותפת, אזי שניהם מייצגים מספרים (המספרים המונים את מספר הפעמים שהמידה המשותפת נכנסת לתוכם). אפשר לדרוש שהמספרים הללו יהיו מצומצמים, במובן שלא שניהם זוגיים. יוצא מכאן שהריבועים DBHI ו־AGFE הם מספרים ריבועיים. ברם, הריבוע AGFE הוא כפליים הריבוע DBHI כפי שרואים בציור. ז.א., הריבוע AGFE הוא מספר ריבועי זוגי. יוצא מכאן שצלעו AG (השווה ל־DH) היא גם כן זוגית. ז.א., הריבוע AGFE מתחלק בדיוק ל־4, כך שהריבוע ABCD, הרבע שלו, הוא גם כן מספר. אבל הריבוע DBHI הוא ריבוע כפול לריבוע ABCD, ז.א., הוא מהווה מספר ריבועי זוגי, ז.א., שצלעו, BD, היא גם כן מספר זוגי, בניגוד להנחה שהמספרים DB ו־DH אינם שניהם זוגיים. ז.א., הואיל ו־DH הוא זוגי, DB חייב להיות אי־זוגי, אך הוכח שהוא גם כן זוגי. הגענו, אם כן, לסתירה הנובעת מן ההנחה המוטעית ש־DB ו־DH הם בעלי מידה משותפת.

בלי להרבות בדברים בשלב זה, נדמה לי שצריך להיות ברור לקורא שההוכחה הזאת שונה מבחינה קונספטואלית תכלית השינוי מן ההוכחה האלגברית הניתנת לדבריו של אריסטו. היא אינטואיטיבית, גאומטרית, ציורית, תואמת את הידע על תכונותיה של המתמטיקה היוונית בתקופה הפיתגוראית, ואף הולמת את תיאורו של אריסטו. היא עדיפה, על כן, על הפירוש האלגברי והיא בוודאי יותר קרובה לאמת ההיסטורית.

הסתננות אל הזרות

כל פירוש היסטורי של טקסט (מתמטי או אחו־) הוא תירגום. שפה מסוימת, יוונית למשל, איננה גלימה אדישה, אבסטרקטית, טהורה, אוניוורסלית, שאֶפשר להלבישה ולהתאימה במידה שווה של התאמה על כל תוכן קונספטואלי שהוא. במידה זאת או אחרת, כל שפה מציעה את פירושה־שלה לחיים (ג. סטיינר). כדי להבין את המתמטיקה היוונית חייב ההיסטוריון להסתנן לתוך הזרות, ״הסיטרא אחרא״ של העולם האידיאי המתמטי של היוונים. כך, למשל, כל מהלך השואף להבנתה של המתמטיקה היוונית כפנומן יווני, אינו יכול לסגל לעצמו הרמנויטיקה שמולידה את העולם האלסטי, הכפיף, הנייטרלי, הסימבולי של האלגברה המודרנית. מחשבות, רעיונות, לרבות מחשבות ורעיונות מתמטיים, אינם יוצאים לאוויר העולם עירום ועריה, כדי שיהיה אפשר רק לאחר מכן להלבישם בבגדים כלשהם, נייטרליים ובלתי מוגדרים. אם כי להבין פירושו לתרגם, יש תירגומים טובים ויש תירגומים רעים. ההיסטוריונים של המתמטיקה, בנתחם טקסטים מתמטיים עתיקים, לא ביצעו בדרך־כלל תירגום סימפטתי, שיהיה פירוש הולם לטקסטים הללו, אלא יצרו טרַנסמוּטַציה, אולי טרנסוּבסטנציאציה, בתרגמם את הטקסט המקורי, המילולי, עם הוכחותיו הרטוריות לשפה סימבולית, לא־וֶרבלית, מערכת של סימנים בעלי תוכן אלגברי לרוב. אפשר באמת לטעון שהוולגתה של החרשתן הטיפוסי של המחקרים ההיסטוריים בתחום של תולדות המתמטיקה היתה האלגברה. זאת היתה בחירה הרת־אסון.

נכון אומנם שכל תירגום הוא פירוש, אך יש תירגומים (פירושים) אמינים ויש טרנסמוטציות שבוגדות בטקסט המקורי באמצעות שיעבודו למתחים ולפוטנציאליות הטמונים במערכת לשונית זרה, לא־ורבלית. דוגמה אחת צריכה להספיק.

במשפט הרביעי של הספר השני של האלמנטים טוען אאוקלידס:
אם קו ישר נחתך בנקודה שרירותית, אזי הריבוע על הקו כולו שווה לשני הריבועים על הקטעים ולפעמיים המלבן הנכלל על־ידי הקטעים.
התירגום המקובל של המשפט הזה הוא:

$$(1) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

והמתרגמים־המפרשים טענו לשקילותו המוחלטת של התירגום לניסוח המילולי במקור היווני. ברם, אם נדייק, ואין לנו כל ברירה אחרת, אין זאת אמת. כאשר הניסוח הנוסחתי נמצא בידינו, יש לנו בו בזמן מספר בלתי מוגבל של זהויות אלגבריות אחרות המתקבלות מן הזהות המקורית באמצעות החוקים הסטנדרטיים של מניפולציות אלגבריות, כגון:

$$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

$$a + b = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$(2) \quad (a + b)^{2/3} = (a^2 + b^2 + 2ab)^{1/3}$$

וכו׳ וכו׳.

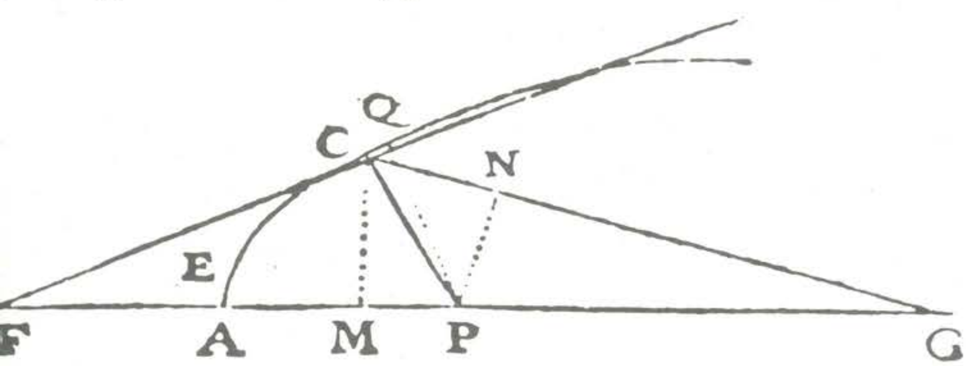
estentre x & y, est $y - byy - cdy + bcd + dxy \propto 0$.

ù ostant x, on a $y - byy - cdy + bcd + dy$ $ss - vv + 2vy - yy$. & remetrant en ordre ces mes par le moyen de la multiplication, il vient

$$-2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd \propto 0.$$

Et ainsi des autres.

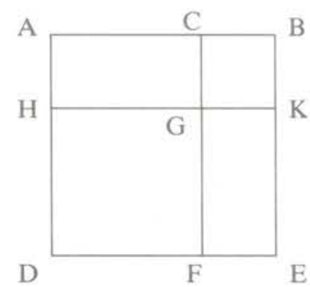
Mesme encore que les poins de la ligne courbe ne se pportassent pas en la façon que iay ditte a ceux d'vne gne droite, mais en toute autre qu'on sçauroit imagir, on ne laisse pas de pouuoir tousiours auoir vne telle quation. Comme si C E est vne ligne, qui ait tel rapprt aux trois poins F, G, & A, que les lignes droites tiees de chascun de ses poins comme C, iusques au point , surpassent la ligne F A d'vne quantité, qui ait certaine proportiō donnée a vne autre quantité dont GA surpasse les lignes tirées des mesmes



oins iusques à G. Faisons G A $\propto b$, A F $\propto c$, & prenant discretion le point C dans la courbe, que la quantité lont C F surpasse F A, soit à celle dont G A surpasse

דף מתוך "הגאומטריה" של דקרט,
המתאר את יישום האלגברה החדשה לגאומטריה.
חלוצי המתמטיקה החדישה של המאות ה־16 וה־17 היו,
בנוסף לדקרט, ויאט ופרמה.

התולדות הטריביאליות הללו של (1) הן לחלוטין לא נהירות ומיידיות בני־סוח הרטורי והגאומטרי של אאוקלידס. ישנן כאלה שהן אפילו לא בנות־השגה בניסוח היווני [למשל (2)]. אם יוסיף על כך הקורא שבאלמנטים ניתנת הוכחת הטענה באמצעות טרנספורמציות המבוצעות על דיאגרמה גאומטרית, אשר נראית בצורתה הסופית כך:



הוא יבין בנקל שבין הניסוח האלגברי לבין הניסוח הרטורי בלוויית ההוכחה הגאומטרית המופיעים אצל אאוקלידס מפרידה תהום עמוקה.
הניסוח האלגברי הוא אבסטרקטי, ומתאים להפליא לתימרונים המירביים של טרנספורמציות אלגבריות, בשעה שהניסוי האאוקלידי הוא הרבה יותר מוגבל על־ידי עצם ניסוחו המילולי, תחבירו והמגבלות המרחביות של הדיאגרמה האאוקלידית המתלווה להוכחה ומהווה חלק אינטגרלי ממנה. שפה מצויה (Ordinary langauage) ודיאגרמות מישוריות או מרחביות שמתלוות אליה אינן שקולות לטרנסמוטציות האלגבריות שלהן. השפה המתמטית היוונית והשפה האלגברית אינן שקולות.
יש, על כן, הבדל חשוב ביותר בין תרגום שבתוך אותה שפה (intra-language translation), לבין טרנסמוטציה בין־לשונית (inter-language transmutation). הראשון מהווה את ההרמנויטיקה ההיסטורית ההולמת, ואילו השני הוא א־היסטורי על־פי עצם ההגדרה. סמלים אלגבריים הם מונוסֶמיים ואילו ביטויי השפה המצויה (ordinary language constructs) הם לרוב פוליסמיים. האותיות המופיעות בהוכחותיו של אאוקלידס הן לא סמלים אמיתיים, הן שמות־עצם, ועל כן הן בו בזמן גם עשירות יותר וגם תחומות יותר מהסמלים האלגבריים היבשים, המדויקים והאבסטרקטיים המנוצלים להעתקתן ולתרגומן של ההוכחות שבהן הן מופיעות. השפה היוונית היא עשירה יותר, וכן היא גם כפולת־משמעות יותר, מסתורית יותר וגם הרבה פחות מדויקת מן הסימול האלגברי המנוצל ל"תירגומה".
האמת ניתנת להיאמר, שגישתו של המתמטיקאי לתולדות המתמטיקה היא בדרך כלל סינכרוניסטית, הוריזונטלית, בשעה שמה שנחוץ בבירור זוהי גישה דיאכרונית, וֶרטיקלית, שבלעדיה אין כותבים את ההיסטוריה של המתמטיקה, אלא את המתמטיקה של ההיסטוריה. אם אנו קוראים לחשיבה האנליטית של המתמטיקה החדישה של המאות ה־16 וה־17, המתמטיקה כפי שעשו אותה וִיאֶט, דקרט ופרמָה, בשם Mathesis – גישה מתמטית שקראתי לה במקום אחר "mos per symbola" – אזי ברור ש־Lexis non est mathesis.
טענתי היא שרוב ההיסטוריונים של המתמטיקה בני־זמננו הם פלטוניסטים בגישתם. הם מחפשים בעבר של המתמטיקה את האמת הנצחית, את הבלתי־משתנה, את הקבוע. כמו כן, התרבות הוגדרה מבחינה "טופולוגית" (על־ידי ג'ורג' סטיינר) בתור "A sequence of translations and transformations of Constants". הגדרה כזאת היא בוודאי יציר ex post facto של חוקר התרבות. אי אפשר לדבר על constants אלא אך ורק לאחר שחלו שינויים שנשארו בעיני ההרמנויטיקה אינווריאנטים. אבסורד לדבר על קבועים כאשר אין שינוי. וההיסטוריון מעוניין יותר מכל במאורע השינוי (The event of change). מה שנשמר הוא חשוב, אך הוא ניתן להערכה רק לאור מה שהשתנה. על כן, לדבר על קבועים יש טעם רק מפני שיש משתנים (variables). אם אין שינוי אין היסטוריה.
ספציפית, אחרי המצאת האלגברה אפשר לגלות את גרעינה הרציונלי בגיאומטריה, ועל־ידי כך לזהות כביכול את הקבוע. יחד עם זאת, גישה כזאת שקולה להעלמת עין מעצם השינוי שהתרחש בבריאתה של האלגברה. הגישה הזאת, המתאימה לאנתרופולוג הסטרוקטורלי, חותרת תחת אושיותיו של ההיסטוריון, מאחר שהיא מעוורת את עיניו לתהליך השינוי.

אשליות ילדותיות ומבוגרים

ויקטור הוגו אמר, בהתרגזו על המספר הרב של שיריו שהפכו לשנסונים:
"Défense de déposer de la musique au long de cette poésie".
Mutatis mutandis יש לומר:
"Défense de déposer de l'algèbre au long de la géométrie grèque".
המאמר הזה הגיע לסיומו. הוא אינו מכיל את כל מה שאפשר לומר על הנושא והסיבות לכך מתמצות, עד כמה שהדבר ייראה מוזר בעיני הקורא, בדברים שהוקראו בטקס הענקת פרס נובל ליצחק בשביס־זינגר ב־1978, אם כי נכתבו שמונה שנים לפני כן, לרגל הענקת פרס אחר לבשביס־זינגר ה־National Book Award, על ספרו *A Day of Pleasure: Stories of a Boy Growing Up in Warsaw*:
"יש חמש־מאות סיבות לכך שהתחלתי לכתוב לילדים, אך כדי לחסוך בזמן אמנה רק עשר מהן.
סיבה ראשונה: ילדים קוראים ספרים, לא ביקורות. הם מצפצפים על המבקרים.
סיבה שניה: הילדים אינם קוראים ספרים במטרה לגלות את זהותם־שלהם.
סיבה שלישית: הם אינם קוראים כדי להשתחרר מתחושת־אשמה, להרוות את צמאונם למרד, או כדי להיפטר מתחושת הניכור.
סיבה רביעית: אין להם צורך בפסיכולוגיה.
סיבה חמישית: הם שונאים סוציולוגיה.
סיבה ששית: הם אינם מנסים להבין את קפקא או את Finnegans Wake.
סיבה שביעית: הם עדיין מאמינים באלוהים, במשפחה, במלאכים, בשדים, במכשפות, בגובלינים, בלוגיקה, בבהירות, בניקוד ובדברים רבים נוספים שאבד עליהם הכלח.
סיבה שמינית: הם אוהבים סיפורים מעניינים, ולא הסברים, הדרכות או הערות שוליים.
סיבה תשיעית: כשספר משעמם אותם הם מפהקים בגלוי, ואינם פוחדים מן הסמכות ואף לא בושים בפניה.
סיבה עשירית: הם אינם מצפים מן הסופרים האהובים עליהם לגאול את האנושות. צעירים ככל שיהיו הם מבינים שאין זה בכוחם של הסופרים. רק למבוגרים יש אשליות ילדותיות מן הסוג הזה."

לקריאה נוספת:
T.L. Heath (ed. and transl.), *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vols., Cambridge 1908.
Richard J. Gillings, *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, Cambridge Mass. 1972.
O. Neugebauer, *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, Band I: *Vorgriechische Mathematik*, Berlin 1934.
B.L. Van der Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Berlin 1983.
S. Unguru, "On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics", *Archive for the History of Exact Sciences*, vol.15, 1975, pp. 67 – 114.